

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA RESPUESTA SÍSMICA DEL SISTEMA TRIDIMENSIONAL ACOPLADO EDIFICIO-RIELES-CONTRAPESO DE UN ASCENSOR

Orlando Cundumi S.¹ y Luis E. Suárez²

RESUMEN: Los ascensores son componentes no estructurales de edificios que muchas veces cumplen funciones de vital importancia como es el caso de aquellos localizados en hospitales. Así como el edificio puede ser afectado por un movimiento sísmico fuerte, también los ascensores pueden sufrir daños. Durante el terremoto de 1971 en San Fernando, California, cientos de ascensores fueron severamente dañados en el área de Los Ángeles. Esto hizo que por primera vez se incorporaran en los códigos para diseño e instalación de ascensores medidas para tener en cuenta el efecto de los terremotos. Si bien los daños reportados durante terremotos subsiguientes en California disminuyeron, todavía se observaron numerosas fallas. La falla más común fue el descarrilamiento del contrapeso en los ascensores eléctricos, seguida por la deformación permanente de los rieles.

Este proyecto de investigación pretende explicar el comportamiento de los contrapesos durante un terremoto fuerte mediante una simulación numérica. Se desarrolló un modelo de un edificio multipiso en donde se incluye un modelo del contrapeso y de sus dos rieles. El edificio se sometió a la aceleración en la base registrada durante un terremoto histórico para obtener la respuesta en el tiempo. Los resultados confirman que, a no ser que se implementen medidas especiales, el sistema *riel – contrapeso* va a fallar debido al sismo. El modelo desarrollado y la metodología usada para calcular la respuesta pueden ser útiles para estudiar cómo reforzar los ascensores para que resistan mejor los movimientos sísmicos.

INTRODUCCIÓN

Solamente en los Estados Unidos más de quinientos mil ascensores trasladan pasajeros durante todo el día y la noche todos los días del año, tanto en edificios comerciales como residenciales. Muchos de estos elevadores cumplen funciones críticas como es el caso de los ascensores en hospitales y clínicas. Es lógico preguntarse cuán seguro es este medio de transportación cuando el edificio en donde se ubica es sometido a un terremoto fuerte.

En el terremoto de San Fernando, California, del año 1971, se pudo observar daños muy intensos en los ascensores en el área de Los Ángeles. Los mayores daños se presentaron en los contrapesos, muchos de los cuales se salieron de sus guías. Los ascensores hidráulicos no sufrieron mayores daños, ni en éste ni en otros terremotos. Para mitigar futuros daños en los ascensores de tracción o eléctricos, se adoptó en California en 1975 el primer código nacional para elevadores, y en 1981 el código nacional para elevadores y escaleras mecánicas.

El terremoto de Whittier Narrows, California, en 1987, fue el primer evento sísmico en afectar considerablemente un significativo número de ascensores que habían sido modificados o construidos de acuerdo al código de California. Un reporte más completo del comportamiento de los ascensores durante terremotos en los Estados Unidos y otros lugares del mundo se puede encontrar en el estudio de Suárez y Singh (2000).

Después de ocurrido la mayoría de estos terremotos se realizó una recolección de datos de los diversos daños sufridos por los ascensores. El siguiente es un breve resumen de los daños reportados:

- Daños en el sistema de contrapeso: aquí se incluyen la distorsión plástica de los rieles, falla de los brazos de unión de los rieles a la caja de ascensores y el descarrilamiento de los contrapesos.
- Daños en el salón de máquinas: falla de sistemas de anclaje, vuelco de gabinetes, paneles de control, etc.
- Daños en los carros: este tipo de falla no fue, sin embargo, muy frecuente.

¹ Estudiante Graduado, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, PR

² Profesor, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Puerto Rico, Mayagüez, PR 00681-9041.

El daño más común fue el descarrilamiento del contrapeso, y a veces la colisión con la cabina de pasajeros. Con el fin de minimizar las fallas, el código para el diseño e instalación de ascensores usado en los Estados Unidos, el código ASME A-17 (American Society of Mechanical Engineers 1993) propuso una serie de medidas, dispositivos y otras recomendaciones. Sin embargo, aunque demostraron ser parcialmente efectivas, las medidas recomendadas no lograron cumplir cabalmente su objetivo. Los daños experimentados durante los terremotos pasados (Schiff 1988, Swerrie 1990, Suárez y Singh 2000) demuestran la necesidad de mejorar el procedimiento de análisis y diseño usado para los ascensores. Con este fin, y con el auspicio del Centro Multidisciplinario para Investigaciones en Ingeniería Sísmica (*Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research*) localizado en la Universidad de Buffalo, en el estado de Nueva York, se han realizado una serie de investigaciones sobre el comportamiento de elevadores durante sismos intensos (Suárez y Singh 2000, Singh et al 2002).

El objetivo principal de esta investigación, la cual es una continuación de las antes señaladas, es calcular la respuesta de los rieles y el contrapeso de un ascensor en un edificio modelado en forma tridimensional cuando este último es sometido a un sismo en la base, usando un modelo combinado que incluye el edificio, los rieles y el contrapeso.

Para obtener la respuesta sísmica se modelarán los rieles como vigas tridimensionales mediante elementos finitos. Se supondrá que cada riel se encuentra en contacto con la losa del edificio mediante unos resortes que representan los brazos de apoyo y que tienen una rigidez apropiada definida de acuerdo al tipo de deformación (axial o flexión). A su vez, los rieles se unen al pórtico del contrapeso mediante unos resortes con rigidez constante. Estos resortes representan la flexibilidad los rodillos del contrapeso.

Para obtener las matrices de rigidez y de masa del sistema acoplado (edificio-riel-contrapeso) para los dos modelos a estudiarse se utilizará la energía potencial y cinética y las ecuaciones de Lagrange. Para resolver las ecuaciones de movimiento se usará el método de superposición modal implementado numéricamente en programas en **MATLAB**.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL MODELO

La formulación de las ecuaciones de movimiento, o más bien la determinación de las matrices de rigidez y masa del conjunto completo dado que el modelo es lineal, es un proceso relativamente largo. Sin embargo, a continuación se describen los pasos principales.

Edificio torsional de losa rígida

El edificio en el cual se encuentra el ascensor se va a modelar mediante el conocido modelo de tres grados de libertad por piso, en donde se supone que las losas son rígidas en su plano y fuera del mismo y que toda la masa está concentrada a nivel de las mismas. Este modelo, llamado a veces “edificio torsional” se muestra en la Figura 1. Se va a considerar la presencia de excentricidad en las dos direcciones perpendiculares. Las losas están acopladas a los rieles del contrapeso en cada uno de los pisos como se muestra en la Figura 1, o sea se considerará que los apoyos están a nivel de las losas. La Figura 1 muestra además los ejes coordenados usados durante todo el análisis.

Ecuación de movimiento del riel

Para modelar el riel se va a considerar el elemento de viga de tres nudos que se muestra en la Figura 2. El nudo 1 está en la losa superior (o piso j), el nudo 3 está a nivel de la losa inferior (o piso i), y el nudo 2 es uno central. La longitud entre apoyos del riel es L . Usualmente la sección transversal de estos rieles está normalizada. Por ejemplo, en los Estados Unidos se usan vigas de acero con la forma de una T invertida identificadas por su peso en libras por pie lineal, por ejemplo 8 libras, 11 libras, etc. (Janovsky 1993).

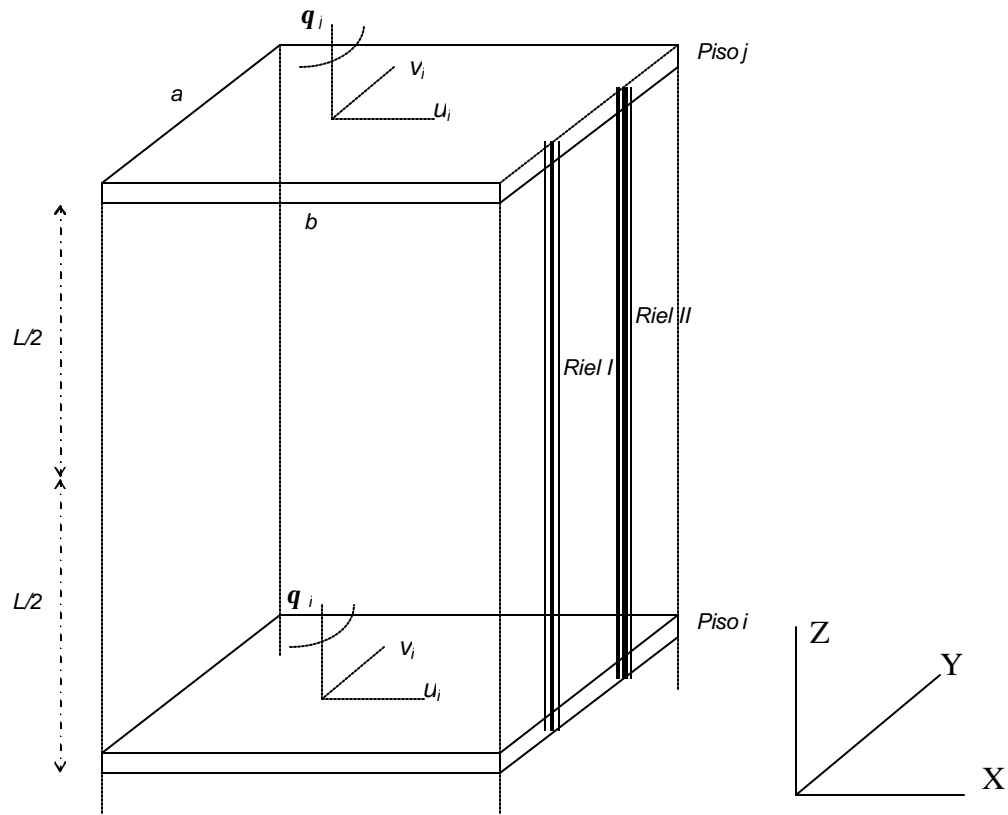


Figura 1: Edificio torsional de losa rígida .

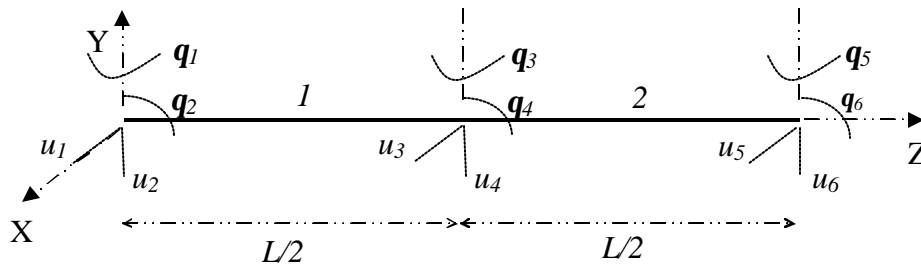


Figura 2: Elemento de viga tridimensional de tres nudos.

Como se demuestra en la formulación de elementos finitos para vigas, los campos desplazamientos en una dirección se puede expresar como el producto de funciones de forma $N_i(z)$ por los desplazamientos y giros de los extremos de cada elemento en esa misma dirección. Por ejemplo, para los desplazamientos $w_1(z,t)$ en la dirección X del tramo 1 se puede escribir

$$w_1(z,t) = \begin{bmatrix} N_1(z), N_2(z), N_3(z), N_4(z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2(t) \\ q_2(t) \\ u_4(t) \\ q_4(t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde las funciones de forma son

$$\begin{aligned} N_1(z) &= 1 - 12\left(\frac{z}{L}\right)^2 + 16\left(\frac{z}{L}\right)^3 + \left(\frac{z}{L}\right)^2 & ; & \quad N_2(z) = \left[\left(\frac{z}{L}\right) - 8\left(\frac{z}{L}\right)^2 + 8\left(\frac{z}{L}\right)^3 \right] L \\ N_3(z) &= 12\left(\frac{z}{L}\right)^2 - 16\left(\frac{z}{L}\right)^3 & ; & \quad N_4(z) = \left[-4\left(\frac{z}{L}\right)^2 + 8\left(\frac{z}{L}\right)^3 \right] L \end{aligned} \quad (2)$$

Para obtener las matrices de masas y de rigidez del elemento de riel completo conviene introducir un vector con los 12 desplazamientos y giros del elemento de viga con tres nodos:

$$\underline{\dot{q}}^T(t) = [u_1, u_2, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, u_3, u_4, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, u_5, u_6, \mathbf{q}_5, \mathbf{q}_6] \quad (3)$$

Estas coordenadas se muestran en la Figura 2. En términos de las coordenadas $q_i(t)$, la ecuación (1) puede escribirse como

$$w_1(z, t) = [\mathbf{h}(z)] \underline{\dot{q}}(t) \quad (4)$$

donde la matriz 1×12 $[\mathbf{h}(z)]$ contiene las funciones de forma en las columnas apropiadas

$$[\mathbf{h}(z)] = [0, N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4, 0, 0, 0, 0] \quad (5)$$

Usando este procedimiento, el campo de desplazamientos en la dirección Y se puede escribir como

$$u_1(z, t) = [\mathbf{n}(z)] \underline{\dot{q}}(t) = [N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4, 0, 0, 0, 0, 0] \underline{\dot{q}}(t) \quad (6)$$

El subíndice 1 identifica al tramo. Similarmente, para el tramo 2 los campos de desplazamientos en direcciones X e Y son

$$w_2(z, t) = [\mathbf{y}(z)] \underline{\dot{q}}(t) = [0, 0, 0, 0, 0, N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4] \underline{\dot{q}}(t) \quad (7)$$

$$u_2(z, t) = [\mathbf{a}(z)] \underline{\dot{q}}(t) = [0, 0, 0, 0, N_1, 0, N_2, 0, N_3, 0, N_4, 0] \underline{\dot{q}}(t)$$

Una vez que los desplazamientos están expresados en términos de las coordenadas nodales, es sencillo obtener las matrices de rigidez y masa como se muestra a continuación.

Ecuación de la energía cinética del riel

Para determinar la matriz de masa (consistente), consideremos la energía cinética de un elemento de viga uniforme con dos tramos y con área transversal A_r y densidad ρ :

$$T = \frac{1}{2} \rho A_r \int_0^{L/2} \left\{ [\dot{w}_1(z, t)]^2 + [\dot{u}_1(z, t)]^2 + [\dot{w}_2(z, t)]^2 + [\dot{u}_2(z, t)]^2 \right\} dz \quad (8)$$

Reemplazando las derivadas respecto al tiempo de las ecuaciones (4), (6) y (7), la energía cinética se puede expresar en forma compacta como

$$T_r = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T(t) [\mathbf{M}_{riel}]_{12 \times 12} \underline{\dot{q}}(t) \quad (9)$$

donde $\underline{\dot{q}}(t)$ es el vector de velocidades, o sea la derivada del vector $\underline{q}(t)$ de la ecuación (3).

Por definición, la matriz en la ecuación (9) es la matriz de masa del riel

$$[\mathbf{M}_{riel}] = \rho A_r \int_{z=0}^{z=L/2} \left([\mathbf{h}(z)]^T [\mathbf{h}(z)] + [\mathbf{n}(z)]^T [\mathbf{n}(z)] + [\mathbf{y}(z)]^T [\mathbf{y}(z)] + [\mathbf{a}(z)]^T [\mathbf{a}(z)] \right) dz \quad (10)$$

Por razones de espacio, la forma explícita de la matriz de masa no se incluye en este artículo. El lector interesado puede consultar la tesis en la que se basa este trabajo (Cundumi 2002).

Ecuación de la energía potencial del riel

La energía potencial (o sea la energía de deformación por flexión en este caso) de la viga uniforme con dos tramos con rigidez flexional EI_x y EI_y es

$$V = \frac{1}{2}EI_x \int_0^{L/2} \left\{ [w''_1(z,t)]^2 + [u''_1(z,t)]^2 \right\} dz + \frac{1}{2}EI_y \int_0^{L/2} \left\{ [w''_2(z,t)]^2 + [u''_2(z,t)]^2 \right\} dz \quad (11)$$

Reemplazando las segundas derivadas respecto a z de las ecuaciones (4), (6) y (7) se tiene que la energía potencial se puede escribir como una forma cuadrática con la siguiente forma matricial:

$$V_r = \frac{1}{2} \tilde{q}^T(t) [K_{riel}]_{12 \times 12} \tilde{q}(t) \quad (12)$$

y la matriz de rigidez del riel es:

$$[K_{riel}] = EI_{rx} \int_{z=0}^{z=L/2} \left([h''(z)]^T [h''(z)] + [n''(z)]^T [n''(z)] \right) dz + EI_{ry} \int_{z=0}^{z=L/2} \left([y''(z)]^T [y''(z)] + [a''(z)]^T [a''(z)] \right) dz \quad (13)$$

Esta matriz es válida tanto para el riel I como el II pues éstos son idénticos. Nuevamente, la forma explícita de $[K_{riel}]$ no se muestra por razones de espacio (ver Cundumi 2002).

Ecuación de movimiento del edificio

A continuación se va a definir el modelo de un piso cualquiera formado por dos losas, las columnas y los dos rieles del contrapeso. Se supone aquí que el contrapeso *no* está ubicado entre estos dos pisos.

Ecuación de la energía cinética del edificio

Si se usan como grados de libertad los desplazamientos del centro de masa, la ecuación de la energía cinética para un piso asume una forma muy simple:

$$T_e = \frac{1}{2}m_i(\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{1}{2}m_j(\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2) + \frac{1}{2}m_i R_i^2 \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2}m_j R_j^2 \dot{q}_j^2 \quad (14)$$

donde m_k es la masa asignada a la losa " k ", y R_k es el radio de giro de la misma losa definido en términos del momento de inercia polar I_c respecto al eje vertical Z :

$$I_c = m_k * R_k^2 \quad (15)$$

La energía cinética se puede escribir como una forma cuadrática en forma matricial como sigue:

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\tilde{q}}^T(t) [M_{edificio}]_{6 \times 6} \dot{\tilde{q}}(t) \quad (16)$$

La matriz de masa de los pisos consecutivos " i " y " j " del edificio es una matriz diagonal de 6×6 con los elementos $[m_i, m_i, m_i R_i^2, m_j, m_j, m_j R_j^2]$ en su diagonal principal.

Ecuación de la energía potencial del edificio

Supongamos que entre las losas " i " y " j " hay m columnas, y que la rigidez de las columnas en las direcciones X y Y son K_{xi} y K_{yi} . Las coordenadas de la columna genérica " n " son (x_n, y_n) .

Las coordenadas de los centros de masa de las losas " i " y " j ", son respectivamente (x_{cm_i}, y_{cm_i}) y (x_{cm_j}, y_{cm_j}) . Con estos valores se obtienen los desplazamientos de las columnas y se puede demostrar que la ecuación de la energía potencial para el edificio se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
V_e = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{x_n} \left\{ \left[u_j - (y_n - y_{cm_j}) \mathbf{q}_j \right] - \left[u_i - (y_n - y_{cm_i}) \mathbf{q}_i \right] \right\}^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{y_n} \left\{ \left[v_j + (x_n - x_{cm_j}) \mathbf{q}_j \right] - \left[v_i + (x_n - x_{cm_i}) \mathbf{q}_i \right] \right\}^2 \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \left\{ \left[K_{x_n} (y_n - y_{cm_j})^2 + K_{y_n} (x_n - x_{cm_j})^2 \right] (\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)^2 \right\}
\end{aligned} \quad (17)$$

Debido a que los rieles están unidos a las losas por brazos de acero que se representan como resortes lineales, se debe considerar además la energía de deformación de estos resortes. La rigidez de los resortes en el sentido Y es flexional, en el sentido X es axial, y vienen dadas por las expresiones siguientes:

$$k_{ry} = 3 \frac{EI_b}{L_b^3} \quad ; \quad k_{rx} = \frac{EA_b}{L_b} \quad (18)$$

donde I_b y A_b son respectivamente, el momento de inercia respecto al eje neutro y el área transversal, y L_b es la longitud del brazo.

La energía potencial de los resortes de los brazos es

$$\begin{aligned}
V_b = & \frac{1}{2} K_{ry} \left\{ \left[v_j + (x_{r_1} - x_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r1y_j} \right]^2 + \left[v_j + (x_{r_2} - x_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r2y_j} \right]^2 \right\} \\
& + \left\{ \left[v_i + (x_{r_1} - x_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r1y_i} \right]^2 + \left[v_i + (x_{r_2} - x_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r2y_i} \right]^2 \right\} \\
& + \frac{1}{2} K_{rx} \left\{ \left[u_j - (y_{r_1} - y_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r1x_j} \right]^2 + \left[u_j - (y_{r_2} - y_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r2x_j} \right]^2 \right\} \\
& + \left\{ \left[u_i - (y_{r_1} - y_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r1x_i} \right]^2 + \left[u_i - (y_{r_2} - y_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r2x_i} \right]^2 \right\}
\end{aligned} \quad (19)$$

donde (x_{r_1}, y_{r_1}) y (x_{r_2}, y_{r_2}) son, respectivamente, las coordenadas en donde los brazos de apoyo de los rieles I y II están adheridos a la losa. Las coordenadas q_{r1x_i}, q_{r1y_i} son los desplazamientos en las direcciones X y Y del extremo del brazo del riel I unido a la losa "i". Las otras coordenadas deben interpretarse de manera similar.

La energía potencial debido a la deformación de las columnas y los brazos de apoyo es:

$$V_{e/b} = V_e + V_b \quad (20)$$

En teoría, es posible identificar la matriz de rigidez de un piso del edificio con los cuatro resortes que representan los brazos de apoyo de los rieles expresando en forma matricial la forma cuadrática en la ecuación (20), o sea como:

$$V_{e/b} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{e/b}^T [\mathbf{K}_{e/b}]_{14 \times 14} \mathbf{q}_{e/b} \quad (21)$$

donde $\mathbf{q}_{e/b}$ es un vector con las catorce coordenadas que aparecen en la definición de $V_{e/b}$, o sea

$$\mathbf{q}_{e/b}^T = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} q_{r1x_i} & q_{r1y_i} & q_{r1x_j} & q_{r1y_j} & u_i & v_i & \mathbf{q}_i & u_j & v_j & \mathbf{q}_j & q_{r2x_i} & q_{r2y_i} & q_{r2x_j} & q_{r2y_j} \end{array} \right] \quad (22)$$

Sin embargo, en este caso este método es engorroso. Por lo tanto, se propone identificar la matriz $[\mathbf{K}_{e/b}]$ usando el segundo término en las ecuaciones de Lagrange, o sea la derivada de la energía potencial $V_{e/b}$ respecto a las coordenadas generalizadas. Comenzamos derivando $V_{e/b}$ respecto a las coordenadas u_i, v_i, u_j, v_j y $\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j$. Necesitamos escribir estas seis ecuaciones en forma matricial. Para esto vamos a introducir tres vectores con coordenadas generalizadas. El primero contiene los grados de libertad asociados con las losas "i" y "j":

$$\underline{q}_e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \mathbf{q}_i \\ u_j \\ v_j \\ \mathbf{q}_j \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Los dos siguientes vectores contienen los desplazamientos horizontales de los extremos de los brazos de apoyo de los rieles. Se define un vector para cada riel:

$$\underline{q}_{rI} = \begin{Bmatrix} q_{rIxi} \\ q_{rIyi} \\ q_{rIxj} \\ q_{rIyj} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{q}_{rII} = \begin{Bmatrix} q_{r2xi} \\ q_{r2yi} \\ q_{r2xj} \\ q_{r2yj} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Usando los tres vectores, y observando cuidadosamente los términos en las seis derivadas se concluye que éstas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_e} = [K_{edif}] \underline{q}_e + [K_{acopedif/riell}] \underline{q}_{rI} + [K_{acopedif/riellII}] \underline{q}_{rII} \quad (25)$$

donde $[K_{edif}]$ es una matriz de rigidez de 6 x 6 asociada a un piso genérico del edificio entre las losas “i” y “j”. Las matrices $[K_{acop.edif/riell}]$ y $[K_{acop.edif/riellII}]$ de dimensión 6 x 4 acoplan los grados de libertad del edificio (aquellos en el vector \underline{q}_e) con los desplazamientos del extremo del riel I (los que aparecen en el vector \underline{q}_{rI}) y con los desplazamientos en el vector \underline{q}_{rII} .

La función $V_{e/b}$ también depende de las cuatro coordenadas q_{rIxi} , q_{rIyi} , q_{rIxj} , q_{rIyj} del vector \underline{q}_{rI} . Por lo tanto, para completar las ecuaciones de movimiento es necesario derivar la energía potencial $V_{e/b}$ respecto a estas coordenadas. Al examinar las expresiones resultantes, se concluye que las cuatro derivadas respecto a las coordenadas en el vector \underline{q}_{rI} se pueden expresar en forma matricial como

$$\frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_{rI}} = [K_{riell}] \underline{q}_{rI} + [K_{acopriellIedif}] \underline{q}_e \quad (26)$$

donde $[K_{acopriellI/edif}]$ es la transpuesta de $[K_{acop.edif/riell}]$ y $[K_{riellI}]$ es una matriz de rigidez de 4 x 4 asociada a los resortes que representan los brazos de apoyo del riel I:

$$[K_{riellI}] = \begin{bmatrix} K_{rx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ry} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{rx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{ry} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Luego debe derivarse V_e respecto a las cuatro coordenadas en el vector \underline{q}_{rII} . Se obtiene así:

$$\frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_{rII}} = [K_{riellII}] \underline{q}_{rII} + [K_{acopriellIIedif}] \underline{q}_e \quad (28)$$

La matriz de 4 x 6 $[K_{acop.riellII/edif}]$ que relaciona los grados de libertad del riel I con los de las dos losas es la transpuesta de $[K_{acop.edif/riellII}]$.

Vamos ahora a agrupar las tres derivadas de la energía potencial respecto a los vectores de coordenadas. Usando las ecuaciones (25), (26) y (28) se puede escribir

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_{rl}} \\ \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_e} \\ \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_{rl}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{rielI}] & [K_{acopriell/edif}] & [0] \\ [K_{acopedif/rielI}] & [K_{edif}] & [K_{acopedif/rielII}] \\ [0] & [K_{acopriellIII/edif}] & [K_{rielIII}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_{rl} \\ \underline{q}_e \\ \underline{q}_{rl} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (22), esta última expresión se puede escribir en forma más compacta como :

$$\frac{\partial V_{e/b}}{\partial \underline{q}_{e/b}} = [K_{e/b}]_{14 \times 14} \underline{q}_{e/b} \quad (30)$$

La matriz $[K_{e/b}]$ de 14×14 es la matriz de rigidez asociada a las columnas de un piso genérico del edificio y a los brazos de apoyo de los dos rieles.

Ahora se puede definir la matriz de rigidez para el sistema edificio-rieles, para un piso genérico en donde no está el contrapeso. Esta matriz se obtiene ensamblando las matrices en las ecuaciones (13) y (29), y tiene la siguiente forma:

$$[K_{piso}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel I} \end{bmatrix}_{12 \times 2} & & & \\ & \begin{bmatrix} \text{matriz de acoplamiento} \\ \text{del edificio y el riel I} \end{bmatrix}_{6 \times 2} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{edificio} \end{bmatrix}_{6 \times 6} & \\ & & \begin{bmatrix} \text{matriz de} \\ \text{acoplamiento} \\ \text{del edificio y} \\ \text{el riel III} \end{bmatrix}_{2 \times 6} & \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel III} \end{bmatrix}_{12 \times 2} \end{bmatrix}_{30 \times 30} \quad (31)$$

La matriz de masa para un piso sin contrapeso $[M_{piso}]$, tiene una forma similar a $[K_{piso}]$, con la diferencia que las matrices de acoplamiento entre el edificio y el riel *I* y *II* no aparecen.

Contrapeso ubicado entre dos niveles

En la sección anterior se obtuvieron las matrices de rigidez y masa del modelo compuesto por un piso y los rieles, pero hasta ahora no se ha involucrado la participación del contrapeso. Se van ahora a obtener las ecuaciones de movimiento, o más bien las matrices para el sistema *edificio-riel-contrapeso*. El primer caso que se considera es aquel en el cual el contrapeso está ubicado en algún lugar entre las losas “i” y “j”, como se muestra en la Figura 3.

Ecuación de movimiento del riel

Para modelar el riel en el piso donde se encuentra ubicado el contrapeso se va a discretizar el primero con una viga con cinco nodos, donde los dos nodos adicionales coinciden con los puntos donde el contrapeso hace contacto con el riel por medio de las guías de rodillos. La posición del contrapeso a lo largo del riel en un mismo piso puede variarse modificando la distancia *a* entre el borde superior del contrapeso o la distancia *b* a la losa inferior.

Para una viga tridimensional con cinco nodos y cuatro tramos, el vector $\underline{q}(t)$ de desplazamientos y giros de los nodos tiene 20 elementos. Los campos de desplazamientos de los cuatro tramos $w_1, u_1, w_2, u_2, w_3, u_3, w_4, u_4$, se pueden expresar en términos las matrices de funciones de forma y de $\underline{q}(t)$ como se demostró en una sección anterior.

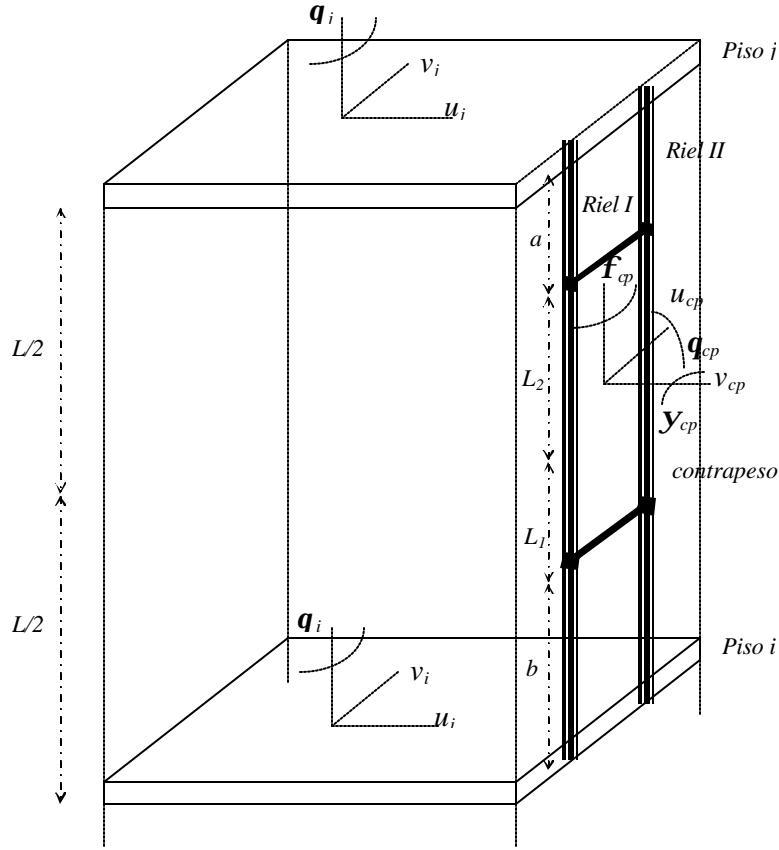


Figura 3: Modelo para un contrapeso ubicado entre dos niveles (Entre dos losas consecutivas).

Ecuación de la energía cinética del riel

Remplazando los 8 campos de velocidades en la expresión de la energía cinética de una viga con cuatro tramos, la ecuación de la energía cinética del riel resulta:

$$T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t) \left[\mathbf{r} \mathbf{A}_r \begin{pmatrix} \int_{z=0}^{z=b} [\mathbf{h}(z)]^T [\mathbf{h}(z)] + [\mathbf{y}(z)]^T [\mathbf{y}(z)] dz \\ + \int_{z=0}^{z=L_1} [\mathbf{n}(z)]^T [\mathbf{n}(z)] + [\mathbf{a}(z)]^T [\mathbf{a}(z)] dz \\ + \int_{z=0}^{z=L_2} [\mathbf{J}(z)]^T [\mathbf{J}(z)] + [\mathbf{d}(z)]^T [\mathbf{d}(z)] dz \\ + \int_{z=0}^{z=a} [\mathbf{e}(z)]^T [\mathbf{e}(z)] + [\mathbf{w}(z)]^T [\mathbf{w}(z)] dz \end{pmatrix} \right] \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (32)$$

La ecuación de la energía cinética en forma compacta es:

$$T_r = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t) [\mathbf{M}_{riel}]_{20 \times 20} \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (33)$$

y la matriz de masa del riel $[\mathbf{M}_{riel}]$ se obtiene efectuando las integraciones en la ecuación (32). Esta matriz está definida explícitamente en Cundumi (2002)

Ecuación de la energía potencial del riel

La energía potencial del riel es la suma de las energías de deformación por flexión de cada tramo en las dos direcciones X y Y. Se va a sumar a ésta además la energía potencial de los resortes que unen el riel al contrapeso.

$$V_r = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) \left[\begin{aligned} & \left\{ EI_y \left(\int_{z=0}^{z=b} [\mathbf{h}'(z)]^T [\mathbf{h}'(z)] dz + \int_{z=0}^{z=L1} [\mathbf{n}'(z)]^T [\mathbf{n}'(z)] dz + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{z=0}^{z=L2} [\mathbf{j}'(z)]^T [\mathbf{j}'(z)] dz + \int_{z=0}^{z=a} [\mathbf{e}'(z)]^T [\mathbf{e}'(z)] dz \right\} \right. \\ & \left. + EI_x \left(\int_{z=0}^{z=b} [\mathbf{y}'(z)]^T [\mathbf{y}'(z)] dz + \int_{z=0}^{z=L1} [\mathbf{a}''(z)]^T [\mathbf{a}''(z)] dz + \right. \right. \\ & \left. \left. \int_{z=0}^{z=L2} [\mathbf{d}''(z)]^T [\mathbf{d}''(z)] dz + \int_{z=0}^{z=a} [\mathbf{w}'(z)]^T [\mathbf{w}'(z)] dz \right\} \right. \\ & \left. + C_r \begin{bmatrix} [\mathbf{n}(0)]^T [\mathbf{n}(0)] + [\mathbf{e}(0)]^T [\mathbf{e}(0)] \\ + [\mathbf{a}(0)]^T [\mathbf{a}(0)] + [\mathbf{w}(0)]^T [\mathbf{w}(0)] \end{bmatrix} \right] \dot{q}(t) \end{aligned} \right] \quad (34)$$

donde C_r es el coeficiente de rigidez del resorte que representa la flexibilidad de las guías del contrapeso. Se puede demostrar que para un rodillo con un material con módulo de elasticidad E_r y espesor W_r , este coeficiente es aproximadamente

$$C_r = 2E_r W_r \quad (35)$$

La ecuación de la energía potencial en forma compacta del riel se puede escribir como:

$$V_r = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t) [K_{riel}]_{20 \times 20} \dot{q}(t) \quad (36)$$

y por lo tanto la matriz de rigidez del riel con cinco nodos es la definida en la ecuación (34) (ver Cundumi 2002)

Ecuación de movimiento del contrapeso

El contrapeso será modelado como una placa rígida con espesor e , altura L_c y ancho B_c , y con un centro de masa que coincide con el de rigidez. El modelo del contrapeso tiene tres grados de libertad: dos desplazamientos horizontales del centro de masa (u, v) y tres giros ($\mathbf{f}, \mathbf{q}, \mathbf{y}$). La masa del contrapeso es m_{cp} .

Ecuación de la energía cinética del contrapeso

La ecuación de la energía cinética para el contrapeso está dada por la expresión:

$$T_r = \frac{1}{2} m_{cp} (\dot{u}_{cp}^2 + \dot{v}_{cp}^2) + \frac{1}{2} J_q \dot{\mathbf{q}}_{cp}^2 + \frac{1}{2} J_y \dot{\mathbf{y}}_{cp}^2 + \frac{1}{2} J_f \dot{\mathbf{f}}_{cp}^2 \quad (37)$$

donde J_q , J_y , J_f son los momentos de inercia polar de masa respecto a los tres ejes del contrapeso, los cuales están definidos por las siguientes expresiones:

$$J_q = \frac{m_{cp}}{12} (L_c^2 + e^2) \quad ; \quad J_f = \frac{m_{cp}}{12} (B_c^2 + e^2) \quad ; \quad J_y = \frac{m_{cp}}{12} (L_c^2 + B_c^2) \quad (38)$$

Si se define un vector \dot{q}_c :

$$\dot{q}_c^T = [u_{cp}, v_{cp}, \mathbf{q}_{cp}, \mathbf{y}_{cp}, \mathbf{f}_{cp}] \quad (39)$$

la ecuación (37) se puede escribir como:

$$T_{cp} = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T(t) [M_{cp}]_{5 \times 5} \dot{q}_c(t) \quad (40)$$

de donde la matriz de masa para el contrapeso es:

$$[M_{cp}] = \begin{bmatrix} m_{cp} & & & & \\ & m_{cp} & & & \\ & & J_q & & \\ & & & J_y & \\ & & & & J_f \end{bmatrix} \quad (41)$$

Ecuación de la energía potencial del contrapeso

Para determinar la energía potencial del contrapeso apoyado en cuatro resortes con rigidez C_r en el plano y fuera del plano, se deben determinar las deformaciones de los resortes en los cuatro extremos del contrapeso en las dos direcciones horizontales X y Y . Éstas se muestran entre paréntesis en la siguiente expresión. La ecuación de energía potencial se puede entonces escribir como:

$$\begin{aligned} V_{cp} = & \frac{1}{2} C_r \left(u_{cp} + q_5 + f_{cp} \frac{B_c}{2} + q_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} C_r \left(u_{cp} + q_{13} + f_{cp} \frac{B_c}{2} - q_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} C_r \left(u_{cp} + q_{44} - f_{cp} \frac{B_c}{2} - q_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} C_r \left(u_{cp} + q_{36} - f_{cp} \frac{B_c}{2} + q_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} C_r \left(v_{cp} + q_6 + y_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} C_r \left(v_{cp} + q_{14} - y_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} C_r \left(v_{cp} + q_{45} - y_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} C_r \left(v_{cp} + q_{37} + y_{cp} \frac{L_c}{2} \right)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

La energía potencial V_{cp} es función de las cinco coordenadas que describen el movimiento del bloque del contrapeso, de las cuatro coordenadas asociadas al riel I y de las correspondientes al riel II. Por lo tanto, V_{cp} va a contribuir a un total de 13 ecuaciones de movimiento. Para obtener esta contribución se deriva primero la función V_{cp} respecto a las coordenadas u_{cp} , v_{cp} , q_{cp} , q_{cp} y f_{cp} y las cinco derivadas resultantes se expresan en forma matricial. De esta manera se pueden obtener algunas de las submatrices de rigidez que van a formar la matriz de rigidez de 13 x 13.

Para esto debemos antes definir tres vectores de coordenadas. El primero de ellos contiene los grados de libertad asociados al contrapeso y están definidos en la ecuación (39). Los otros dos vectores contienen los grados de libertad de los rieles I y II y están definidos por la ecuación (24). Calculando las derivadas respecto a las coordenadas en el vector q_c y usando los tres vectores, éstas se pueden escribir como

$$\frac{\partial V_{cp}}{\partial q_c} = [K_{cp}] q_c + [K_{acopcpriell}] q_{rl} + [K_{acopcprielll}] q_{rll} \quad (43)$$

donde la matriz asociada al contrapeso es diagonal, y tiene los siguientes elementos:

$$[K_{cp}] = \begin{bmatrix} 4C_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4C_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_r L_c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_r B_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_r L_c^2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Las otras dos matrices en la ecuación (43) son matrices de acoplamiento entre el contrapeso y los rieles. Para el riel I:

$$[K_{acopcpriell}] = \begin{bmatrix} C_r & 0 & C_r & 0 \\ 0 & C_r & 0 & C_r \\ \frac{1}{2} C_r L_c & 0 & -\frac{1}{2} C_r L_c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} C_r L_c & 0 & -\frac{1}{2} C_r L_c \\ \frac{1}{2} C_r B_c & 0 & \frac{1}{2} C_r B_c & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

La matriz $[K_{acopcp/riell}]$ es similar a la del riel I, excepto que los términos $(C_r B_c/2)$ en la última fila tienen signo negativo.

Consideremos a continuación las derivadas de la energía potencial V_{cp} respecto a las coordenadas en el vector \underline{q}_{rl} . Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial como sigue

$$\frac{\partial V_{cp}}{\partial \underline{q}_{rl}} = [K_{riell}] \underline{q}_{rl} + [K_{acopriell/cp}] \underline{q}_c \quad (46)$$

Efectuando las cuatro derivadas y examinando los coeficientes en estas ecuaciones se puede identificar la matriz de rigidez asociada al riel I

$$[K_{riell}] = \begin{bmatrix} C_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_r \end{bmatrix} \quad (47)$$

La matriz de acoplamiento en la ecuación (46) es la transpuesta de la definida en la ecuación (45)

$$[K_{acopriell/cp}] = [K_{acopcpriell}]^T \quad (48)$$

Por último, debemos calcular las derivadas de V_{cp} respecto a las componentes del vector \underline{q}_{rl} . Se puede demostrar que en forma matricial las cuatro derivadas tienen la forma

$$\frac{\partial V_{cp}}{\partial \underline{q}_{rl}} = [K_{riell}] \underline{q}_{rl} + [K_{acopriell/cp}] \underline{q}_c \quad (49)$$

donde las matrices asociadas al riel y de acoplamiento son

$$\begin{aligned} [K_{riell}] &= [K_{riell}] \\ [K_{acopriell/cp}] &= [K_{acopcpriell}]^T \end{aligned} \quad (50)$$

Las ecuaciones (43), (46) y (49) se pueden agrupar como sigue

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial V_{cp}}{\partial \underline{q}_{rl}} \\ \frac{\partial V_{cp}}{\partial \underline{q}_c} \\ \frac{\partial V_{cp}}{\partial \underline{q}_{r2}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{riell}] & [K_{acopriell/cp}] & [0] \\ [K_{acopcpriell}] & [K_{cp}] & [K_{acopcpriell}] \\ [0] & [K_{acopriell/ledif}] & [K_{riell}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_{rl} \\ \underline{q}_c \\ \underline{q}_{r2} \end{Bmatrix} \quad (51)$$

Matriz de rigidez y de masa de los pisos i y j

Con el ordenamiento anterior, la matriz de rigidez del piso $[K_{i-j}]$ que incluye el edificio, los dos rieles con sus brazos de apoyo y el contrapeso con sus guías se forma ensamblando las submatrices en las ecuaciones (25), (36) y (51). La matriz resultante es de dimensiones 51 x 51:

$$[K_{i-j}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 20} & & & & \\ & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{edif - riel I} \end{bmatrix}_{6 \times 20} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{edificio} \end{bmatrix}_{6 \times 6} & & \\ & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{cont - riel II} \end{bmatrix}_{5 \times 20} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{5 \times 6} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{contrapeso} \end{bmatrix}_{5 \times 5} & \\ & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{20 \times 20} & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{edif - riel III} \end{bmatrix}_{20 \times 6} & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{cont - riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 5} & \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 20} \end{bmatrix}_{51 \times 51} \quad (52)$$

Las matrices de los dos rieles, del edificio y del contrapeso (o sea las que aparecen en la diagonal de $[K_{i-j}]$) no necesitan modificarse y pueden ensamblarse directamente. Las matrices de acoplamiento entre el edificio y los rieles, y entre el contrapeso y los rieles necesitan expandirse para que los grados de libertad que se usaron en sus definiciones sean compatibles con los del vector q_{i-j} .

La correspondiente matriz de masa $[M_{i-j}]$ tiene una forma similar a $[K_{i-j}]$, excepto que las cuatro matrices de acoplamiento fuera de la diagonal son cero para esta matriz.

Contrapeso ubicado entre dos pisos

El modelo anterior puede usarse para calcular la respuesta en un caso en donde el contrapeso se mueve entre dos pisos consecutivos “i” y “j”. En esta sección se va a considerar el caso en que el plano del contrapeso está por encima de una losa intermedia “j” ubicada entre las losas o pisos inferior “i” y superior “k”. El modelo cuyas matrices de masa y rigidez se desea determinar se muestra en la Figura 4. El proceso para hallar estas matrices es similar al del modelo anterior, comenzando con uno de los dos rieles.

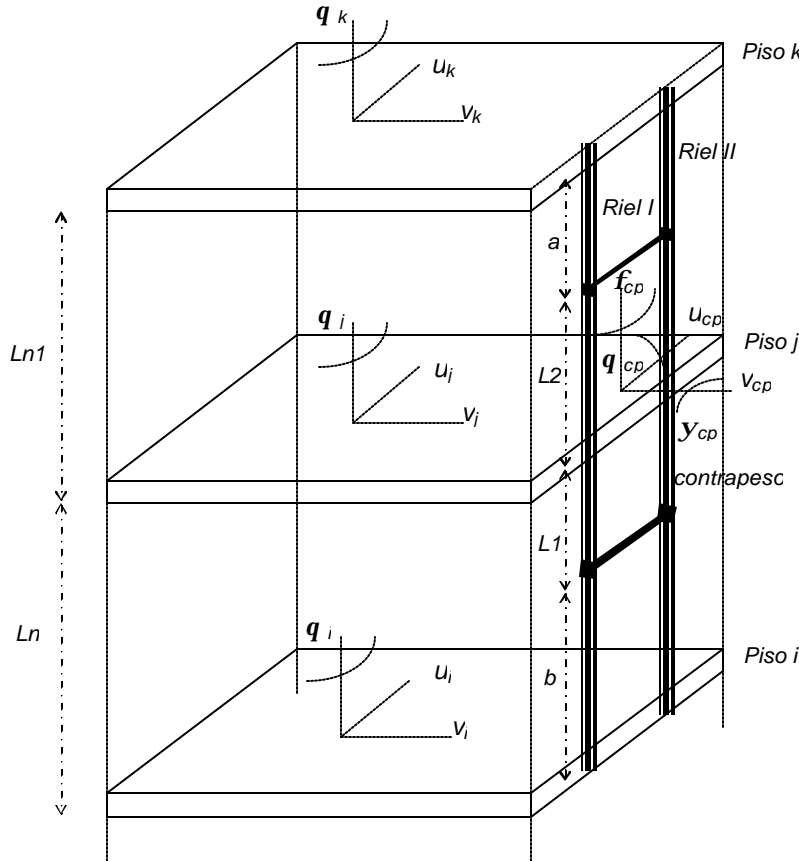


Figura 4: Modelo para un contrapeso ubicado en dos pisos.

Ecuación de movimiento del riel

Para este modelo se discretizará el riel con tres tramos y cinco nodos, donde los nodos 2 y 4 coinciden con la posición donde el contrapeso hace contacto con el riel por medio de los rodillos y los nodos 1, 3 y 5 coinciden con la losa de los pisos i, j, k . La posición del contrapeso puede variar a lo largo del riel a través de los dos pisos, modificando la distancia a la losa del piso superior a y a la losa del piso inferior b . Las matrices de rigidez y masa para este riel son las mismas que las del modelo anterior (contrapeso ubicado entre dos niveles), puesto que presentan los mismos grados de libertad. Sólo cambia la definición de las longitudes L_1 y L_2 , que en este caso son iguales a la altura del piso menos la distancia a y b , respectivamente.

Ecuación de la energía cinética del edificio

Denotando con el subíndice i a la losa inferior, con j a la losa central y con k a la losa superior, la ecuación de la energía cinética para tres losas consecutivas se puede escribir de la siguiente forma:

$$T_e = \frac{1}{2}m_i(\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2) + \frac{1}{2}m_j(\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2) + \frac{1}{2}m_k(\dot{u}_k^2 + \dot{v}_k^2) + \frac{1}{2}m_i R_i^2 \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2}m_j R_j^2 \dot{q}_j^2 + \frac{1}{2}m_k R_k^2 \dot{q}_k^2 \quad (53)$$

Usando un vector \underline{q}_e :

$$\underline{q}_e^T = [u_i, v_i, q_i, u_j, v_j, q_j, u_k, v_k, q_k] \quad (54)$$

Esta ecuación en forma matricial tiene la forma:

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}_e^T(t) [M_{edificio}]_{9 \times 9} \dot{\underline{q}}_e(t) \quad (55)$$

y por consiguiente la matriz $[M_{edificio}]$ es diagonal con los elementos $m_i, m_i, m_i R_i^2, m_j, m_j, m_j R_j^2$ etc. en su diagonal.

Ecuación de la energía potencial del edificio

La energía potencial para dos pisos consecutivos se puede obtener simplemente sumando los términos respectivos de cada piso.

$$\begin{aligned} V_e = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{x_{nb}} \left\{ \left[u_j - (y_{nb} - y_{cm_j}) q_j \right] - \left[u_i - (y_{nb} - y_{cm_i}) q_i \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{y_{nb}} \left\{ \left[v_j + (x_{nb} - x_{cm_j}) q_j \right] - \left[v_i + (x_{nb} - x_{cm_i}) q_i \right] \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \left\{ \left[K_{x_{nb}} (y_{nb} - y_{cm_j})^2 + K_{y_{nb}} (x_{nb} - x_{cm_j})^2 \right] (q_j - q_i)^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{x_{nt}} \left\{ \left[u_k - (y_{nt} - y_{cm_k}) q_k \right] - \left[u_i - (y_{nt} - y_{cm_i}) q_i \right] \right\}^2 \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m K_{y_{nt}} \left\{ \left[v_k + (x_{nt} - x_{cm_k}) q_k \right] - \left[v_i + (x_{nt} - x_{cm_i}) q_i \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m \left\{ \left[K_{x_{nt}} (y_{nt} - y_{cm_k})^2 + K_{y_{nt}} (x_{nt} - x_{cm_k})^2 \right] (q_k - q_i)^2 \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

A la energía de deformación de los resortes en la ecuación (19) se le debe agregar la contribución del brazo en la losa “ k ”. De esta manera se obtiene:

$$V_b = + \frac{1}{2} K_{ry} \left\{ \begin{aligned} & \left[v_k + (x_{r_1} - x_{cm_k}) q_k - q_{r1y_k} \right]^2 + \left[v_k + (x_{r_2} - x_{cm_k}) q_k - q_{r2y_k} \right]^2 \\ & \left[v_j + (x_{r_1} - x_{cm_j}) q_j - q_{r1y_j} \right]^2 + \left[v_j + (x_{r_2} - x_{cm_j}) q_j - q_{r2y_j} \right]^2 \\ & \left[v_i + (x_{r_1} - x_{cm_i}) q_i - q_{r1y_i} \right]^2 + \left[v_i + (x_{r_2} - x_{cm_i}) q_i - q_{r2y_i} \right]^2 \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} K_{rx} \left\{ \begin{aligned} & \left[u_k - (y_{r_1} - y_{cm_k}) \mathbf{q}_k - q_{r1x_k} \right]^2 + \left[u_k - (y_{r_2} - y_{cm_k}) \mathbf{q}_k - q_{r2x_k} \right]^2 \\ & \left[u_j - (y_{r_1} - y_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r1x_j} \right]^2 + \left[u_j - (y_{r_2} - y_{cm_j}) \mathbf{q}_j - q_{r2x_j} \right]^2 \\ & \left[u_i - (y_{r_1} - y_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r1x_i} \right]^2 + \left[u_i - (y_{r_2} - y_{cm_i}) \mathbf{q}_i - q_{r2x_i} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Por lo tanto la energía de deformación del edificio y los brazos de apoyo es la suma de las ecuaciones (56) y (57).

$$V_{e/b} = V_e + V_b \quad (58)$$

Observando las ecuaciones (56) y (57) se concluye que la energía potencial es función de 21 coordenadas generalizadas. Si se define un vector $\mathbf{q}_{e/b}$ con estas coordenadas

$$\mathbf{q}_{e/b}^T = \begin{bmatrix} q_{r1x_i} & q_{r1y_i} & q_{r1x_j} & q_{r1y_j} & q_{r1x_k} & q_{r1y_k} & u_i \\ v_i & \mathbf{q}_i & u_j & v_j & \mathbf{q} & u_k & v_k \\ \mathbf{q}_k & q_{r2x_i} & q_{r2y_i} & q_{r2x_j} & q_{r2y_j} & q_{r2x_k} & q_{r2y_k} \end{bmatrix} \quad (59)$$

la energía potencial podría escribirse en la siguiente forma matricial:

$$V_{e/b} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{e/b}^T [K_{e/b}]_{21 \times 21} \mathbf{q}_{e/b} \quad (60)$$

Procediendo igual que en el caso anterior, las tres derivadas de la energía potencial respecto a los vectores de coordenadas antes definidos se pueden agrupar en una única expresión.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \mathbf{q}_{rl}} \\ \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \mathbf{q}_e} \\ \frac{\partial V_{e/b}}{\partial \mathbf{q}_{rl}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{riel}] & [K_{acopriel/edif}] & [0] \\ [K_{acopedif/riel}] & [K_{edif}] & [K_{acopedif/riel}] \\ [0] & [K_{acopriel/edif}] & [K_{riel}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{rl} \\ \mathbf{q}_e \\ \mathbf{q}_{rl} \end{bmatrix} \quad (61)$$

O en forma más compacta como :

$$\frac{\partial V_{e/b}}{\partial \mathbf{q}_{e/b}} = [K_{e/b}]_{21 \times 21} \mathbf{q}_{e/b} \quad (62)$$

La matriz $[K_{e/b}]$ debe ensamblarse con las dos matrices de rigidez de los rieles. Éstas están dadas por la ecuación (21).

Una vez que se completa el proceso de ensamblaje se obtiene una matriz de 49 x 49. Ésta es la matriz de rigidez $[K_{piso}]$ para el sistema *edificio-rieles* donde se consideraron tres losas consecutivas y tiene la siguiente configuración:

$$[K_{piso}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel I} \end{bmatrix}_{20 \times 20} & \begin{bmatrix} \text{matriz de} \\ \text{deacoplamiento} \\ \text{del edificio y el riel II} \end{bmatrix}_{9 \times 20} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{edificio} \end{bmatrix}_{9 \times 9} & \begin{bmatrix} \text{matriz de} \\ \text{acoplamiento} \\ \text{del edificio y} \\ \text{el riel III} \end{bmatrix}_{20 \times 9} & \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel III} \end{bmatrix}_{20 \times 20} \end{bmatrix}_{49 \times 49} \quad (63)$$

Ecuación de movimiento del contrapeso

Las matrices de rigidez y de masa del contrapeso para este modelo son iguales que para el modelo anterior. Antes de ensamblarse con la matriz $[K_{piso}]$ anterior, la matriz de rigidez del contrapeso $[K_{cp}]$ debe expandirse.

Matrices de rigidez y masa de los pisos $i-j-k$

La matriz de rigidez del piso $[K_{i-j-k}]$ de 54 x 54 está constituida por las siguientes submatrices:

$$[K_{i-j-k}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 20} & & & & \\ \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{edif - riel I} \end{bmatrix}_{9 \times 20} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{edificio} \end{bmatrix}_{9 \times 9} & & & \\ \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{cont - riel II} \end{bmatrix}_{5 \times 20} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{matriz del} \\ \text{contrapeso} \end{bmatrix}_{5 \times 5} & & \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{edif - riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 9} & \begin{bmatrix} \text{mat. acop} \\ \text{cont - riel II} \end{bmatrix}_{20 \times 5} & \begin{bmatrix} \text{matriz} \\ \text{del riel III} \end{bmatrix}_{20 \times 20} \end{bmatrix}_{54 \times 54} \quad (64)$$

Luego se deben ensamblar las matrices de masa del riel I, edificio, contrapeso y riel II para obtener la matriz $[M_{i-j-k}]$ de los pisos i,j,k donde está el contrapeso. La estructura de la matriz $[M_{i-j-k}]$ es similar a la de $[K_{i-j-k}]$, excepto que las matrices de acoplamiento entre el edificio y el riel I, el edificio y el riel II, el contrapeso y el riel I, el contrapeso y el riel II son nulas.

Cálculo de la Respuesta

La matriz de rigidez para el edificio completo se obtiene ensamblando dos tipos: para los pisos en donde está el contrapeso se debe usar la matriz en la ecuación (52) o (64), dependiendo de la posición del contrapeso. Para todos los otros pisos se debe usar la ecuación (31). El mismo proceso debe seguirse para obtener la matriz de masa total. La ecuación de movimiento para el edificio completo sometido a un sismo con dos componentes horizontales es:

$$[M]\ddot{\underline{U}}(t) + [K]\underline{U}(t) = -[M]\underline{r}_x\ddot{X}(t) - [M]\underline{r}_y\ddot{Y}(t) \quad (65)$$

donde \underline{r}_x y \underline{r}_y son los vectores de coeficientes de influencia. El vector \underline{r}_x tiene 1 en los grados de libertad del vector \underline{U} que son desplazamientos en la dirección X . En el vector \underline{r}_y los términos con 1 son los desplazamientos en la dirección Y .

Una vez que se ensamblan las matrices de rigidez y masas para cualquiera de los modelos presentados, el siguiente paso es obtener la respuesta resolviendo la ecuación (65). Como el sistema se supone lineal, se van a calcular los desplazamientos usando análisis modal. El procedimiento es el estándar: se calculan primero las frecuencias naturales y modos de vibración, los que se usan luego para resolver las ecuaciones de movimiento desacopladas mediante la solución recursiva de la integral de Duhamel. Al sumar los desplazamientos modales multiplicados por los respectivos modos de vibración se obtiene el vector de desplazamiento completo del sistema edificio-rieles-contrapeso. Una vez conocidos los desplazamientos y giros como función del tiempo, interesa calcular los momentos en los rieles y la deformación de sus brazos de apoyo como así también la deformación de las guías de rodillos del contrapeso. Para calcular los momentos se usan las matrices de rigidez individuales de los elementos y se recuperan del vector de desplazamientos total aquellos grados de libertad que corresponden al elemento en cuestión. Con los momentos flectores se pueden calcular los esfuerzos de flexión en el alma y en el flanco de los rieles.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Descripción del terremoto

El sistema edificio-rieles-contrapeso será sometido a la aceleración en la base registrada durante el terremoto ocurrido el 18 de mayo de 1940 en Imperial Valley, California, comúnmente conocido como el terremoto de El Centro. El terremoto original no fue escalado y se aplica en una sola dirección: la del eje Y, o sea en el plano del contrapeso.

Descripción del edificio

Para el cálculo de la respuesta del sistema combinado se utilizó el mismo edificio para los diferentes modelos. Como sistema estructural para el edificio se usa un sistema aporticado de diez pisos de hormigón armado. En la Tabla No 1 se presentan las dimensiones de las columnas y vigas de cada piso, las que se tomaron de un reporte técnico (BSSC 1987).

Tabla 1: Tamaño de columnas y vigas en cada piso del edificio.

Piso	Vigas (pulgadas)	Columnas (pulgadas)
1	24 x 48	27 x 36
2-4	24 x 42	27 x 30
5-7	21 x 36	24 x 30
8-10	18 x 36	21 x 30

En la Figura 5 se presenta la planta típica de un piso, cuyas dimensiones son 150 ft en el sentido X, y 100 ft con 3 pulgadas en el sentido Y. La Figura 6 muestra la variación en altura del edificio.

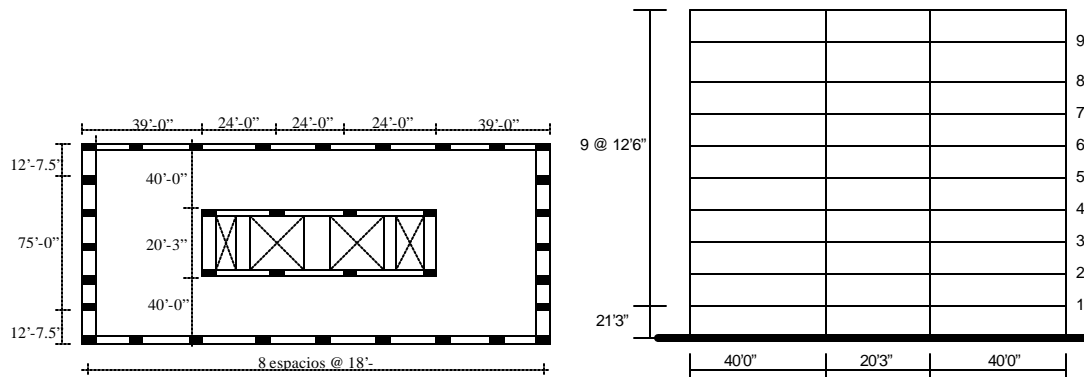


Figura 5: Vista en planta del edificio.

Figura 6: Vista en altura del edificio de diez pisos.

Descripción del ascensor

Para los ejemplos numéricos se utilizará un modelo de ascensor de pasajeros con una capacidad de 2100 libras. El peso del contrapeso es de 4700 libras con una longitud L_c de 138 pulgadas y un ancho B_c de 48 pulgadas. Los rieles se encuentran amarrados a los muros del edificio mediante soportes angulares de acero L3 x 3 x 3/8, con una área de 2.11 pulg² y un momento de inercia de 1.76 pulg⁴. El largo de cada soporte es de 5 pulg. Cada rodillo tiene un recubrimiento de polietileno de 1/2 pulg y un ancho de 5/8 pulg.

Resultados numéricos

Usando las propiedades geométricas de un riel de 8 libras, se calcularon las respuestas de los elementos del ascensor para el caso en que el contrapeso está ubicado entre dos pisos del edificio (el primer modelo presentado). Si bien también se estudió la respuesta del segundo modelo, ésta no se incluye en el presente trabajo. Para considerar el caso más crítico, se colocó el contrapeso al nivel más alto del edificio.

La Figura 7 muestra el desplazamiento del contrapeso en la dirección Y , o sea en su plano. El contrapeso está ubicado en el último nivel del edificio entre los pisos 9 y 10, a una distancia $a = b = 6$ pulgadas de los dos pisos. El desplazamiento máximo del contrapeso fue de 2.37 pulgadas.

En la Figura 8 se grafica la deflexión del nodo superior (o sea a nivel de la losa) de uno de los rieles a nivel del piso 10 en la dirección Y (en el plano del contrapeso). La máxima deformación encontrada fue de 10.1 pulgadas. El contrapeso está ubicado en la misma posición que en el caso anterior.

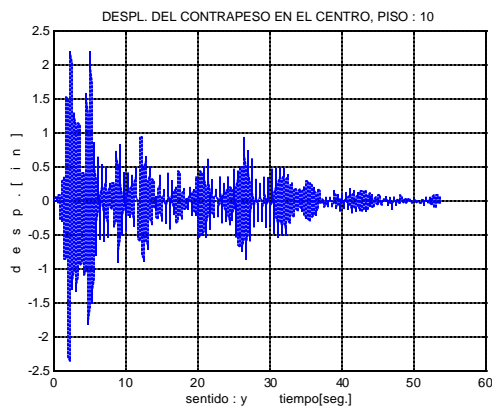


Figura 7: Desplazamiento del contrapeso.

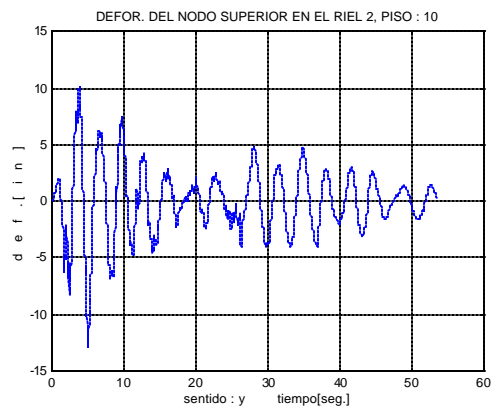


Figura 8: Deflexión del riel II en el nodo superior.

A continuación se considera la deformación del brazo de apoyo para el mismo riel de la Figura 8.

La Figura 9 muestra la deformación en la dirección horizontal en el plano del contrapeso (eje Y). La máxima deformación es aproximadamente 0.04 pulgadas.

La variación en el tiempo de la deflexión del riel en el nodo interior ubicado a una distancia $a = 6$ pulgadas de la losa del último piso se muestra en la Figura 10. La respuesta en este caso es muy similar al del nodo de la Figura 8.

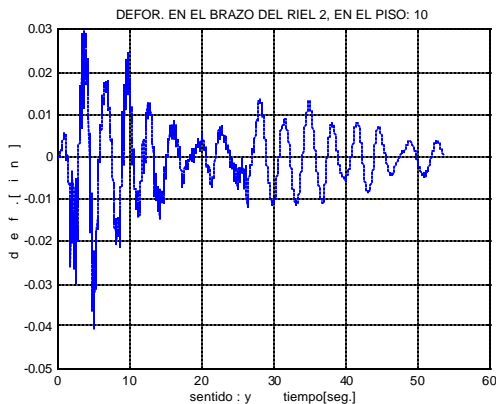


Figura 9: Deformación del brazo de apoyo.

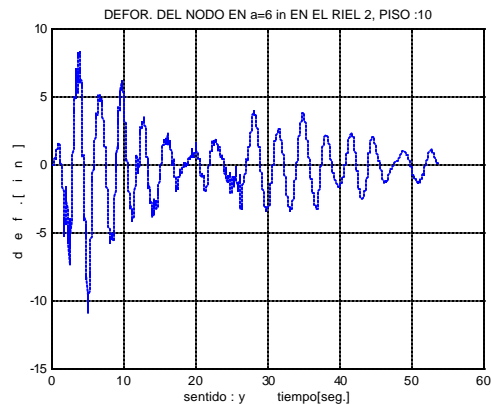


Figura 10: Deflexión del riel II para $a = 6$ ".

Se presentan a continuación los máximos esfuerzos de flexión en los extremos del ala y del alma del riel, como función de la posición del contrapeso comenzando con el caso en el cual su borde superior coincide con la losa 10, hasta que el borde inferior llega a la losa inferior 9. En estos gráficos, los que se llamamos “espectros de esfuerzo máximo”, la posición del contrapeso se presenta en forma adimensional como a/L donde L es la longitud del riel entre apoyos. Nótese que los esfuerzos máximos son muy superiores al esfuerzo de cedencia o fluencia σ_y del acero usado para los rieles. Para averiguar si los esfuerzos se pueden reducir a niveles razonables colocando rieles más grandes, se usaron otros modelos con rieles de 11 lb. y de 15 lb. Los resultados para este último caso se presentan en las Figuras 13 y 14. Si bien los valores de los esfuerzo máximo se redujeron, aún están por encima de los esfuerzos de cedencia del material. Es necesario mencionar que el código ASME 17.1-1993 no permite usar rieles de 18 libras en lugares en los cuales se espera actividad sísmica fuerte (zonas 3 y 4). No obstante, los resultados muestran que si no se toman otras precauciones, aún los rieles más fuertes fallan debido a un terremoto fuerte.

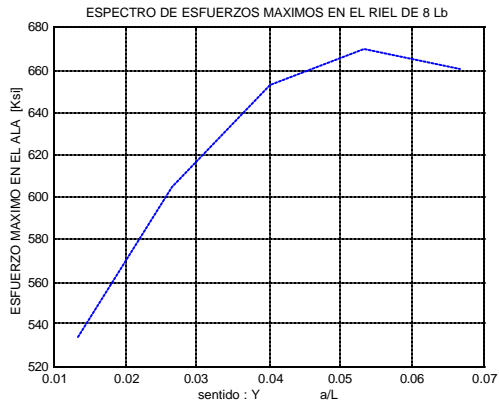


Figura 11: Esfuerzos en el ala del riel de 8 lb

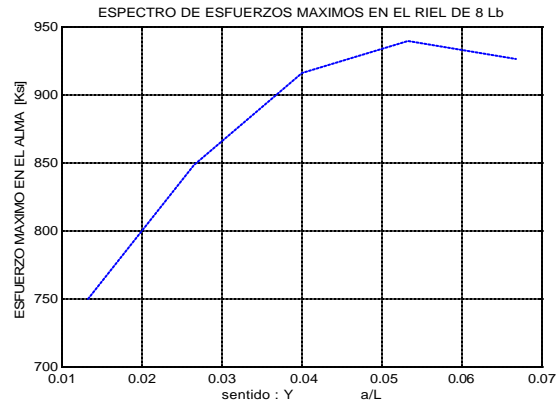


Figura 12: Esfuerzos en el alma del riel de 8 lb

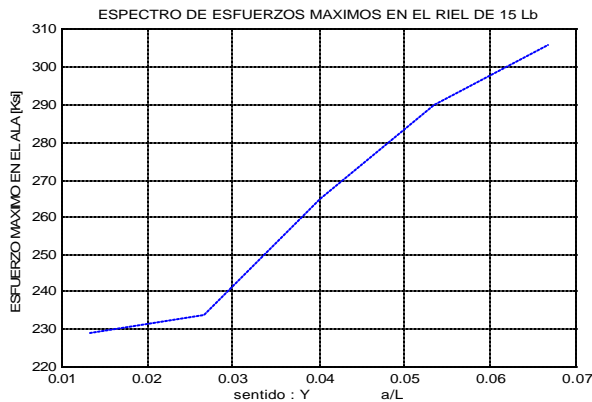


Figura 13: Esfuerzos en el ala del riel de 15 lb.

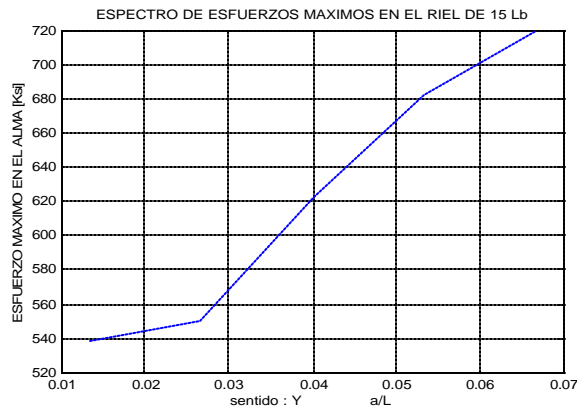


Figura 14: Esfuerzos en el alma del riel de 15 lb

Todos los resultados anteriores confirman lo que los relevamientos de daños en los ascensores luego de terremotos fuertes habían encontrado: los rieles del contrapeso son muy susceptibles a sufrir daños debido a un sismo. Si no se toman medidas adicionales, los contrapesos descarrilarán debido a la falla de los rieles. Por supuesto, como los resultados reportados en este estudio fueron obtenidos usando un análisis lineal, la conclusión a la que se puede llegar debe limitarse a que los rieles entrarán en cedencia o fluencia. Se debe destacar que para evitar el descarrilamiento el código para diseño de ascensores ASME A17.1 recomienda instalar en los extremos del marco del contrapeso unas placas de acero con forma de U que rodean los rieles sin tocarlos. Además, si la distancia entre apoyos de los rieles supera un cierto valor, el código recomienda unir los rieles con un marco en forma de U invertida que rodea al contrapeso. Ninguno de estos elementos ha sido considerado en el presente análisis. Por otro lado, sólo se ha

considerado uno de los componentes de la aceleración de un determinado terremoto. Es posible que al superponer componentes en dos direcciones los resultados sean más severos. Lo mismo puede ocurrir en edificios con una excentricidad más grande que la de la estructura considerada en el ejemplo numérico, o en edificios de mayor altura.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos mostraron claramente que al ser sometido a las cargas sísmicas debido a un terremoto fuerte, los componentes del sistema rieles – contrapeso van a entrar en el rango inelástico, sufriendo deformaciones que pueden hacer descarrilar el contrapeso. Esto se demostró en los resultados numéricos dado que los esfuerzos σ obtenidos siempre superan los esfuerzos de cedencia del acero de los rieles, y por supuesto, sobrepasan por un amplio margen los esfuerzos máximos recomendados por el código ASME A17.1-1993 para el diseño de ascensores. Es posible, no obstante, que los dispositivos recomendados en el código A17.1 (placas en U, marcos de refuerzo de los rieles) y no incluidos en el modelo desarrollado puedan evitar el descarrilamiento del contrapeso. Sin embargo, éstos no van a evitar totalmente la gran deformación que experimentan los rieles. El modelo presentado tiene la ventaja de que considera de manera rigurosa la excitación que va a recibir el contrapeso y sus rieles. Los otros modelos usados anteriormente para estudiar la respuesta sísmica consideraban excitaciones armónicas, o no consideraban la amplificación y filtrado de la señal del terremoto por el edificio, o la interacción entre los rieles y el contrapeso con la estructura, o las aceleraciones extras causadas por la excentricidad del edificio. En este sentido, el modelo propuesto es mucho más riguroso que los presentados en la literatura (por ejemplo, Schiff et al 1980, Yang et al 1983, Tzou y Schiff 1987, 1988, 1989, Singh et al 2002). El modelo podría modificarse para estudiar la respuesta de la cabina de pasajeros, pero la experiencia ha demostrado que ésta no sufre tantos daños como el contrapeso.

REFERENCIAS

- American Society of Mechanical Engineers (1993). *Safety Code for Elevators and Escalators ASME A17.1*, New York.
- Building Seismic Safety Council (1994). “*Guide to Application of the NEHRP Recommended Provisions in Earthquake-Resistant Building Design*” – FEMA 140. Federal Emergency Management Agency, Washington, DC.
- Cundumi, O. (2002). “Simulación Numérica de la Respuesta Sísmica del Sistema Tridimensional Acoplado Edificio-Rieles-Contrapeso”. Tesis de Maestría, Departamento de Ingeniería Civil, Univ. de Puerto Rico, Mayagüez, PR.
- Janovsky, L. (1993). *Elevator Mechanical Design*. Second Edition, Ellis Horwood Series in Mechanical Engineering. West Sussex, Great Britain.
- Schiff, A. J. (1988). “The Whittier Narrows, California Earthquake of October 1, 1987- Response of Elevators”. *Earthquake Spectra*, Vol. 4, No 2, 367-375.
- Schiff, A. J. Tzou, H. S., y Chu, Y. H. (1980). “*Earthquake Response of Elevator Counterweights*”. *Proceedings of the Seventh World Conference on Earthquake Engineering*. Istanbul, Turkey. 8: pp.483-486.
- Singh, M. P., Suárez, L. E., y Ridolva (2002). “Seismic Response of Rail-Counterweight System in Elevators”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 31, 281-303.
- Suárez, L.E. y Singh, M.P. (2000). “Review of Earthquake Performance, Seismic Codes and Dynamic Analysis of Elevators”, *Earthquake Spectra*, Vol. 16, No. 4, 853-878.
- Swerrie, D. A. (1990). “The San Francisco Earthquake of 1989 and an Inspector’s Reflections”. *Elevator World*, Vol. 5, No 5, 14-22.
- Swerrie, D. A. (1990). “The Elevator Code Doesn’t Cover Everything”. *Elevator World*, Vol. 10, No 4, 34-38
- Swerrie, D. A. (1991). “Enhancing Elevator Passenger Safety and Mitigating Elevator Damage During Earthquakes”. *Proceedings of the Second Conference on Tall Buildings in Seismic Regions*, 55th Regional Conference, May 16-17, Los Angeles, California, 393-402.
- Tzou, H. S., y Schiff, A. J. (1987). “Development and Evaluation of a Pseudo-Force Approximation Applied To Nonlinear Dynamic Contacts and Viscoelastic Damping”. *Computer and Structures*, Vol. 26, No 3, 481-493.
- Tzou, H. S., y Schiff, A. J. (1988). “Structural Dynamics of Elevator Counterweight Systems and Evaluation of Passive Constraint”. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 114, No 4, 783-803.
- Tzou, H. S., y Schiff, A. J. (1989). “Dynamics and Control of Elevators with Large Gaps and Rubber Dampers”. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 115, No 11, 2753-2771.
- Yang, T. Y., Kullegowda, H., Rakesh, K. Kaspania, y Schiff, A. J. (1983). “Dynamic Response Analysis of Elevator Model”. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 109, No 105, 1194-1210.